ALGEBRA

Quadratische Gleichungen

Teil 1

Nach diesem reichhaltigen Übungsmaterial sollte man fit sein …

Wenig Theorie und viel Training

Datei Nr. 12220

Stand 14. August 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

VORWORT

Diese Datei ist ein **Trainingstext ohne viel Theorie**. Es werden sehr viele quadratische Gleichungen gelöst und verschiedene Methoden angewandt.

Der Leser muss erkennen, dass es ganz unterschiedliche Formen bzw. Typen von Gleichungen gibt.

Zu jedem Gleichungstyp gehört eine spezielle Methode. Wenn man den Typ erkennt und die zugehörige Methode weiß, kommt man schneller ans Ziel, wie wenn man stur eine Lösungsformel anwendet!

Diese Merkmale und die zugehörigen Methoden sollte man daher gründlich lernen! Hierin zeigt sich später der flotte Rechner, der mit Übersicht ans Werk geht.

Wer die *Theorie* der quadratischen Gleichungen ausführlicher studieren will, sollte die Datei 18022 lesen. Dort geht es um quadratische Funktionen und deren Nullstellen (u. v. a.).

Übersicht über die Texte zu quadratischen Gleichungen und ähnlichem

12219	Quadratische Ergänzung	Vorübungen zu 12220
12220	Quadratische Gleichungen 1	Sehr ausführlich **(Dieser Text!)**
12221	Quadratische Gleichungen	Alle Übungsaufgaben aus 12220 – kompakt!
12222	Quadratische Gleichungen	Lernprogramm!
12223	Quadratische Gleichungen	Textaufgaben
12225	Quadratische Gleichungen	Lernblatt: Das Wichtigste zum Lernen
12226	Quadratische Gleichungen	Quadratische Ergänzung, Übungsaufgaben
12230	Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12240	Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12241	Übungsaufgaben	zu 12240
12245	Wurzelgleichungen 1	
12246	Wurzelgleichungen 2	Übungsaufgaben zu 12245
12260	Gleichungen höheren Grades	
12270	Diverse Gleichungen	Methodentraining
71141	Abiturtraining: Wiederholung der wichtigsten Gleichungsaufgaben	

Inhalt

§ 0	Übersicht über quadratische Gleichungen	4
§ 1	Lösen **reinquadratischer** Gleichungen	5
§ 2	**Erweiterte reinquadratische** Gleichungen	7
	Trainingsblatt 1 (Aufgaben 1 und 2)	8
§ 3	Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$	9
3.1	Lösung von mit quadratischer Ergänzung (1. Methode)	9
	Trainingsblatt 2 (Aufgabe 3)	12
3.2	Herleitung der „Mitternachtsformel“ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	13
3.3	Wie wendet man die Mitternachtsformel an? (5 Musterbeispiele)	14
3.4	17 weitere Musterbeispiele zur Mitternachtsformel mit Hinweisen auf Besonderheiten, die vorkommen	17
	Tabelle der Quadratzahlen zum Auswendiglernen	18
	Trainingsblatt 3 (Aufgabe 4 bis 10)	23
3.5	Herleitung der p-q-Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$	24
3.6	Beispiele zur p-q-Formel	25
$ 4	Sonderformen quadratischer Gleichungen	27
	Trainingsblatt 4 (Aufgaben 11 und 12)	28
	Lösungen der Aufgaben	30 - 43

§ 0 Übersicht über quadratische Gleichungen

Dies sollte man sich merken:

$\boxed{1}$ Eine Gleichung heißt **quadratisch**, wenn man sie auf diese **NORMALFORM** bringen kann:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Beispiel: $x^2 - 4x + 3 = 0$ Hier ist a = 1, b = - 4 und c = 3.

Die Lösungen sind 1 und 3, denn wenn man sie in die linke Seite einsetzt (die Probe machen), erhält man das Ergebnis 0.

Dazu gibt es (einige Seiten später) eine Lösungsformel.

$\boxed{2}$ Ist b = 0 ist, liegt ein wichtiger Sonderfall vor. Diese Gleichungen nennt man dann

reinquadratisch. $\boxed{ax^2 + \boxed{0} \cdot x + c = 0}$ kürzer $\boxed{ax^2 + c = 0}$

z. B.: $x^2 + \boxed{0} \cdot x - 4 = 0$ kürzer: $x^2 = 4$

$x^2 + \boxed{0} \cdot x - 9 = 0$ kürzer $x^2 = 9$

$\frac{1}{2}x^2 + \boxed{0} \cdot x - 3 = 0$ kürzer $\frac{1}{2}x^2 = 3$

$5x^2 + \boxed{0} \cdot x + 8 = 0$ kürzer $5x^2 = -8$

Für reinquadratische Gleichungen gibt es eine einfache Lösungsmethode, die anschließend gezeigt wird.

$\boxed{3}$ Mit einer ganz ähnlichen Methode kann man sogenannte „**erweiterte reinquadratische** Gleichungen" lösen. Beispiele dafür sind:

$(x-3)^2 = 4$ oder $(x+2)^2 = 11$

$\boxed{4}$ Ist c = 0, dann liegt eine **quadratische Gleichung ohne Absolutglied** vor.

$\boxed{ax^2 + bc + \boxed{c} = 0}$ kürzer $\boxed{ax^2 + bc = 0}$

$x^2 - 4x + \boxed{0} = 0$ kürzer $x^2 - 4x = 0$

$2x^2 + 3x + \boxed{0} = 0$ kürzer $2x^2 + 3x = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \boxed{0} = 0$ kürzer $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$

Auch für diese Gleichungen gibt es ein spezielles, einfaches Lösungsverfahren.

Ziel:

Wir werden ein Lösungsverfahren für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lernen, aber auch spezielle Lösungsverfahren für die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ und für die quadratische Gleichung ohne Absolutglied $ax^2 + bx = 0$.

§ 1 Lösung reinquadratischer Gleichungen

Vorkenntnisse über Wurzeln:

Wenn man eine positive oder negative Zahl quadriert, entsteht eine positive Zahl.
Die **Quadratwurzel** macht eine Quadrierung wieder rückgängig, das Ergebnis ist aber stets eine positive Zahl oder 0. Das Ergebnis einer Wurzel ist also nie negativ!

Beispiel: $2^2 = 4$ wird rückgängig gemacht durch $\sqrt{4} = 2$,
$5^2 = 25$ wird rückgängig gemacht durch $\sqrt{25} = 5$

Wenn man aber $(-3)^2 = 9$ rückgänig machen will, entsteht $\sqrt{9} = 3$ und nicht -3 !!

Um dies allgemein auszudrücken muss man folgende Schreibweise kennen: $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

<u>Falsch</u> ist: $\sqrt{x^2} = \pm x$, denn das Rechenergebnis muss ja eindeutig sein.

Man darf aber auch <u>nicht</u> $\sqrt{x^2} = x$ schreiben, denn man sieht ja einer Variablen x kein Vorzeichen an. Bei negativen x wäre das Ergebnis also falsch.

Damit das Ergebnis wie verlangt eine positive Zahl ist, braucht man Betragsstriche.

Beispiel 1 $\boxed{x^2 = 4}$

Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel, ergibt das links $\sqrt{x^2} = |x|$ und rechts $\sqrt{4} = 2$.
Die Folgegleichung lautet also $|x| = 2$. Und diese Gleichung hat 2 Lösungen, denn es gibt genau zwei Zahlen, die den Betrag 2 haben, nämlich 2 und -2.

Und so sollte man das aufschreiben:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \quad | \sqrt{} \\ |x| &= 2 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Vorsicht: Falle !!!

Die meisten lassen nach kurzer Zeit die mittlere Gleichung mit dem Betrag weg.
Dann sieht die **Kurzlösung** so aus:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Das geht in Ordnung!

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \quad | \sqrt{} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Das ist aber nicht in Ordnung!

Lässt man die zweite Zeile weg, dann muss auch der Rechenbefehl $| \sqrt{}$ wegbleiben.
Denn das Ergebnis dieses Befehls „Ziehe die Wurzel" ist nicht $x = \pm 2$!!!

Denn $\sqrt{x^2} = x$ und $\sqrt{4} = \pm 2$ sind falsche Aussagen.

Die neue zweite Gleichung folgt nämlich NICHT durch Ziehen der Wurzel aus der ersten.

Man sollte am Ende noch die Lösungsmenge anschreiben:

$$\mathbf{L} = \{-2\,;2\} \quad \text{oder} \quad \mathbf{L} = \{\pm 2\}.$$

Beispiel 2:

$x^2 - 3 = 0 \quad |+3$

$x^2 = 3 \quad |\sqrt{\ }$

$|x| = \sqrt{3}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

L = $\{\pm\sqrt{3}\}$

Beispiel 3

$x^2 - 1 = 0 \quad |+1$

$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$

$|x| = 1$

$x_{1,2} = \pm 1$

L = $\{\pm 1\}$

Beispiel 4:

$x^2 + 2 = 0 \quad |-2$

$x^2 = -2$

Beispiel 5:

$x^2 + 4 = 0 \quad |-4$

$x^2 = -4$

Da ein Quadrat nie negativ sein kann, besitzen diese Gleichungen keine Lösung.

L = $\{\ \}$ **L =** $\{\ \}$

Beispiel 6:

$\frac{1}{2}x^2 - 6 = 0 \quad |+6$

$\frac{1}{2}x^2 = 6 \quad |\cdot 2$

$x^2 = 12$

$|x| = \sqrt{12}$ *)

$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$

$L = \{\pm 2\sqrt{3}\}$

Beispiel 7:

$\frac{3}{2}x^2 = \frac{2}{3} \quad |:\frac{3}{2} \text{ d.h.} \cdot\frac{2}{3}$

$x^2 = \frac{4}{9}$

$|x| = \frac{2}{3}$

$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

L $= \{\pm\frac{2}{3}\}$

---

*) Anmerkung: Man kann aus 12 teilweise die Wurzel ziehen, denn man kann 12 so in ein Produkt zerlegen, dass ein Faktor eine Quadratzahl ist, aus dem man also die Wurzel ganzzahlig ziehen kann:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

§ 2 Erweiterte reinquadratische Gleichungen

Die Gleichungen: $x^2 = 4$ und $(x-3)^2 = 4$

haben dieselbe Bauart (Form): Links steht ein quadratischer Term und rechts eine Zahl.

Schüler neigen dazu, bei der rechten Gleichung die 2. binomische Formel zur Anwendung bringen.
Dann erhält man $x^2 - 6x + 9 = 4$, also $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Davon wird dringend abgeraten, denn der Rechenaufwand für die Lösung wird dann größer.

> Wir lösen die erweiterte reinquadratische Gleichung mit denselben Schritten wie die (einfache) reinquadratische Gleichung und beachten dabei, dass folgendes gilt:
>
> $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$ und analog dazu $\boxed{\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|}$

	Beispiel 1:	Beispiel 8:
	$x^2 = 4$	$(x-3)^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$
1. Schritt: Wurzel ziehen:	$|x| = 2$	$|x-3| = 2$
2. Schritt: Betrag auflösen:	$x_{1,2} = \pm 2$	$x - 3 = \pm 2$
3. Schritt: Ordnen:		$x_{1,2} = +3 \pm 2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$
Lösungsmenge:	**L =** $\{2; -2\}$	**L =** $\{1; 5\}$

Beispiel 9:

$$(x+2)^2 = 1 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$|x+2| = 1$$
$$x + 2 = \pm 1 \qquad | -2$$
$$x_{1,2} = \pm 1 - 2 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

L = $\{-1; -3\}$

Beispiel 10:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4} \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\left|x - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{3}{2}$$
$$x - \tfrac{1}{2} = \pm \tfrac{3}{2} \qquad | +\tfrac{1}{2}$$
$$x_{1,2} = \pm \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

L = $\{-1; 2\}$

Beispiel 11:

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 0 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\left|x - \tfrac{3}{2}\right| = 0$$
$$x = \tfrac{3}{2}$$

L = $\left\{\tfrac{3}{2}\right\}$

Beispiel 12:

$$(x+1)^2 + 4 = 0$$
$$(x+1)^2 = -4$$

Ein Quadrat wird nie *negativ*!

L = $\{\ \}$

Trainingsblatt 1

Aufgabe 1

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $(x-4)^2 = 1$

c) $(x+2)^2 = 5$

d) $(x+1)^2 = 4$

e) $\frac{1}{2}(x+3)^2 = 0$

f) $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 8$

g) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = 2$

h) $\frac{2}{3}(x-3)^2 = 6$

Aufgabe 2

a) $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = 4$

b) $\frac{1}{4}(x+13)^2 + 2 = 0$

c) $\frac{1}{6}x^2 - 3 = 0$

d) $3 \cdot (x+2)^2 = 0$

e) $\frac{1}{2}(x+4)^2 = 2$

f) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

Lösungen am Ende der Datei.

§ 3 Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Es gibt drei Methoden:

3.1 Quadratische Ergänzung		Seite 9
3.3 Allgemeine Lösungsformel (Mitternachtsformel)		Seite 13
3.6 p-q-Formel.		Seite 24

3.1 Lösung mit quadratischer Ergänzung (1. Methode)

Einführungsbeispiel $\boxed{x^2 + 4x + 3 = 0}$ (1)

Mit der Methode „quadratische Ergänzung“ wird die quadratische Gleichung in die Form

$\boxed{(x+2)^2 = 1}$ (2)

gebracht, also in eine erweiterte reinquadratische Gleichung. (Siehe §2)

Die Umwandlung benötigt 3 Schritte. Dabei wird eine Quadratzahl ergänzt, sodass man durch Rückwärtsanwendung der 1. binomischen Formel das Binom $(x+2)^2$ erzeugen kann.

Aus (1): $\boxed{x^2 + 4x + 3 = 0}$

folgt durch Subtraktion von 3:

(2) $\boxed{x^2 + 4x = -3}$ $\xrightarrow[\text{das Quadrat von 2 ergänzen: } \boxed{+4}]{\text{4 halbieren } \to \text{ 2 und dann}}$ $x^2 + 4x \boxed{+4} = -3 \boxed{+4}$ (3)

Als Binom schreiben (1. binomische Formel)

$\boxed{(x+2)^2 = 1}$ (4)

<u>Hier alles ganz ausführlich</u>: Gegeben ist $\boxed{x^2 + 4x + 3 = 0}$ (1)

1. Schritt: Absolutglied nach rechts, also beidseitig – 3: $\boxed{x^2 + 4x = -3}$ (2)

2. Schritt: <u>Ziel</u> erkennen: „4x ist doppeltes Produkt“ $\underbrace{\left(x^2 + 4x + \square\right)}_{\text{Ziel: } (x+2)^2} = \ldots$

Also wird der Koeffizient 4 halbiert

und von 2 das Quadrat 2^2 = 4 in (2) addiert: $x^2 + 4x + \boxed{4} = -3 + \boxed{4}$ (3)

+4 auf beiden Seiten!

3. Schritt: Zusammenfassen $\boxed{(x+2)^2 = 1}$ (4)

4. Schritt: Erweiterte reinquadratische Gleichung lösen: $x + 2 = \pm 1$

$x = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$

Empfehlung: Die Heftlösung so aufschreiben:

$x^2 + 4x + 3 = 0$

Platz zur Ergänzung frei lassen: $x^2 + 4x + \square = -3 + \square$

Ziel links: Quadratzahl 4 ergänzen: $\underbrace{x^2 + 4x + \boxed{4}} = -3 + \boxed{4}$

Beide Seiten zusammenfassen $(x+2)^2 = 1$

Erweiterte reinquadratische Gleichung lösen: $|x+2| = 1$

(Die Betragszeile kann man weglassen.) $x + 2 = \pm 1$

$x = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$

$L = \{-1; -3\}$

3.3 Wie wendet man die Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ an?

Musterbeispiel 1: $x^2 - 8x + 7 = 0$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$, sollte man erkennen, dass a = 1, b = -8 (das Minuszeichen gehört dazu) und c = 7 ist.

Diese Werte setzt man in die Lösungsformel ein und erhält:

$$x_{1,2} = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

1. Lösung: $x_1 = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$

2. Lösung: $x_2 = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Lösungsmenge: **L =** $\{\ 1 ; 7\ \}$.

Musterbeispiel 2: $x^2 + 8x + 11 = 0$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$, erkennt man, dass a = 1, b = 8 und c = 11 ist.

Die Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ergibt dann:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 44}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -\frac{8}{2} \pm \frac{2\sqrt{5}}{2} = -4 \pm \sqrt{5}$$

Hinweise zu den Berechnungen:

- $\sqrt{20}$ kann man teilweise ziehen. Dazu braucht man eine Quadratzahl als Teiler von 20:
  $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$
- Am Ende zerlegt man den Bruch in zwei Brüche und kürzt jeden von ihnen.
- Die Lösungsmenge **L =** $\left\{-4 + \sqrt{5}\ ; -4 - \sqrt{5}\right\}$

  kann man auch kürzer schreiben: **L =** $\left\{-4 \pm \sqrt{5}\right\}$.

Trainingsblatt 3

Aufgaben

Verwende eine Lösungsformel, schreibe die Lösungsmenge auf

(4) Löse:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ c) $x^2 + 8x - 33 = 0$

d) $x^2 - 7x - 8 = 0$ e) $x^2 + 7x + 10 = 0$ f) $x^2 - 3x - 28 = 0$

(5) Ziehe teilweise die Wurzeln:

a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ b) $x^2 + 8x + 10 = 0$ c) $x^2 - 6x - 9 = 0$

d) $x^2 - 5x - 5 = 0$ e) $x^2 + 2x - 11 = 0$ f) $x^2 - 15x + 25 = 0$

(6) Besondere Gleichungen:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$ b) $x^2 + 26x + 169 = 0$ c) $x^2 - 12x + 36 = 0$

d) $x^2 + x + 5 = 0$ e) $x^2 + 5x + 7 = 0$ f) $x^2 - 8x + 17 = 0$

(7) Nutze die günstige Form der Gleichung:

a) $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x - 10 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 12 = 0$

d) $\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{3}{2} = 0$ e) $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 8 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = 0$

g) $\frac{1}{4}x^2 + x - 24 = 0$ h) $\frac{1}{4}x^2 + x - 8 = 0$ i) $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 = 0$

j) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 10 = 0$ k) $x^2 + 5x - \frac{7}{4} = 0$ l) $x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

(8) Ändere die folgenden Gleichungen, um auf eine günstigere Form zu kommen:

a) $x^2 - 16x + 48 = 0$ b) $-x^2 + 16x + 48 = 0$ c) $x^2 - 18x + 80 = 0$

d) $x^2 + 26x + 168 = 0$ e) $-x^2 - 12x + 64 = 0$ f) $x^2 + 20x + 96 = 0$

g) $-5x^2 + 130x + 600 = 0$ h) $-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0$ i) $\frac{3}{4}x^2 - x - 1 = 0$

(9) Löse wie gegeben:

a) $2x^2 + 4x - 9 = 0$ b) $3x^2 - 14x + 7 = 0$ c) $15x^2 - 11x + 3 = 0$

(10) Beseitige einige Brüche:

a) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{10}{3} = 0$ b) $-\frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$ c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 0$

d) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 = 0$ e) $\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{32}x^2 + x + \frac{1}{8} = 0$

3.6 Beispiele zur p-q-Formel

Ich löse jetzt einige Gleichungen sowohl mit der p-q-Formel wie auch mit der Mitternachtsformel. Auf diese Weise kann man die Lösungswege vergleichen:

Beispiel 1:

$x^2 - 2x - 15 = 0$

p= - 2 und q = - 15.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

führt zu $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$a = 1, b = -2, \ c = -15$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Beide Formeln sind hier gut anwendbar.

Beispiel 2:

$x^2 + 5x + 4 = 0$

p = 5 und q = 4.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

führt zu $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$

$$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$a = 1, b = 5, c = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Jetzt zeigt die p-q-Formel bereits leichte Schwächen, denn sie zwingt zum Bruchrechnen, was nichts Schlimmes ist, was aber Fehler provoziert.

Beispiel 3:

$5x^2 + 9x - 2 = 0 \quad | :5$

Denn die p-q-Formel verlangt. dass x^2 den Koeffizienten 1 hat.

$$x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$

Die p-q-Formel liefert dann:

$$x_{1,2} = -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{2}{5}}$$

$$= -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{40}{100}} = -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{121}{100}}$$

$$= -\frac{9}{10} \pm \frac{11}{10} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -2 \end{cases}$$

$5x^2 + 9x - 2 = 0$

a = 5, b = 9 und c = - 2.

Die „Mitternachtsformel" liefert DAGEGEN

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{10} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{10}$$

$$= \frac{-9 \pm 11}{10} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -2 \end{cases}$$

Die p-q-Formel eignet sich hier weniger.

Das ist der Grund, warum ich die p-q-Formel nicht empfehle.

Beispiel 4: **Auch hier keine p-q-Formel verwenden:**

$$13x^2 - 15x + 2 = 0$$

Für die p-q-Formel | :13

$$x^2 - \frac{15}{13}x + \frac{2}{13} = 0$$

$$p = \frac{15}{13} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{15}{26},\quad q = \frac{2}{13}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$ liefert

$$x_{1,2} = -\frac{15}{26} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{26}\right)^2 - \frac{2}{13}}$$

Und jetzt ?

$$13x^2 - 15x + 2 = 0$$

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot 2 \cdot 13}}{26} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 104}}{26}$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{121}}{26} = \frac{15 \pm 11}{26} = \begin{cases} 1 \\ \frac{2}{13} \end{cases}$$

In der Oberstufe erweist sich die p-q-Formel als besonders unhandlich, vor allem dann, wenn Formvariable ins Spiel kommen, also bei Gleichungen

Wie in $tx^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8t}}{2t}$

Die p-q-Formel erfordert diesen Aufwand: Zuerst Division durch t:

$$x^2 + \tfrac{4}{t}x + \tfrac{2}{t} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\tfrac{2}{t} \pm \sqrt{\tfrac{4}{t^2} - \tfrac{2}{t}} = -\tfrac{2}{t} \pm \sqrt{\tfrac{4-2t}{t^2}} = -\tfrac{2}{t} \pm \tfrac{1}{t}\sqrt{4 - 2t}$$

Dennoch empfehlen viele Lehrer nur die p-q-Formel….

§ 4 Sonderformen quadratischer Gleichungen

Übersicht: Die allgemeine Lösungsformel der Gleichung $ax^2+bx+c=0$

ist die „Mitternachtsformel“ und lautet: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Diese wendet man in zwei Fällen NICHT an, weil dies zu umständlich wäre.

1. Fall: Reinquadratische Gleichungen (b=0): $ax^2+c=0$

Sie wurden in § 1 und 2 bereits besprochen!

Beispiel 1:	Beispiel 2:	Beispiel 3:
$x^2-4=0$	$\frac{1}{2}x^2-6=0$	$x^2+9=0$
$x^2=4 \quad \mid \sqrt{\ }$	$x^2=12$	$x^2=-9$
$\lvert x\rvert=2$	$\lvert x\rvert=\sqrt{12}$	$\mathbf{L}=\{\ \}$,
$x_{1,2}=\pm 2$	$x_{1,2}=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$	da ein Quadrat nie
$\mathbf{L}=\{\pm 2\}$	$\mathbf{L}=\{\pm 2\sqrt{3}\}$	negativ sein kann.

2. Fall: Gleichungen ohne Absolutglied (c = 0): $ax^2+bx=0$

Beispiel 1:	Beispiel 2:	Beispiel 3:
$x^2-4x=0$	$\frac{1}{2}x^2+5x=0$	$3x^2-2x=0$

Wenn das Absolutglied Null ist (also „fehlt“), dann kann man x ausklammern:

$x\cdot(x-4)=0$	$x\cdot\left(\frac{1}{2}x+5\right)=0$	$x\cdot(3x-2)=0$

Jetzt liegt ein sogenanntes <u>Nullprodukt</u> vor.

Wissen: ***Ein Produkt ist genau dann 0, wenn ein Faktor Null ist.***

Der 1. Faktor ist x, also ist die 1. Lösung in solche Fällen stets $x_1 = 0$.
Der 2. Faktor ist die dann Klammer, die man auch 0 setzt und x_2 berechnet:

$(x-4)=0$	$\left(\frac{1}{2}x+5\right)=0$	$(3x-2)=0$
$x_2=4$	$x_2=-10$	$x_2=\frac{2}{3}$
$\mathbf{L}=\{0;4\}$	$\mathbf{L}=\{0;-10\}$	$\mathbf{L}=\{0;\frac{2}{3}\}$

Merke: Fehlt in einer quadratischen Gleichung das Absolutglied (weil c = 0 ist), dann ist die Anwendung einer Lösungsformel zu umständlich.
Man geht dann so vor wie gezeigt, d.h. man klammert x aus und erhält ein Nullprodukt. Die erste Lösung ist in diesem Fall immer die Zahl 0.

Trainingsblatt 4

Aufgabe 11

Bestimme die Lösungsmengen diese Gleichungen

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 - 169 = 0$ c) $x^2 - 32 = 0$

d) $3x^2 - 60 = 0$ e) $\frac{1}{2}x^2 - 14 = 0$ f) $x^2 + 49 = 0$

Aufgabe 12

a) $x^2 + 7x = 0$ b) $x^2 - \frac{5}{3}x = 0$ c) $2x^2 - 4x = 0$

d) $5x^2 + 8x = 0$ e) $\frac{1}{4}x^2 - 13x = 0$ f) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$